

Quantização do campo eletromagnético

Electromagnetismo

Andrés Delgado¹

¹ Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo

Resumo—Para quantizar o hamiltoniano do campo eletromagnético (CE) as variáveis canônicas conjugadas do oscilador de radiação podem ser tratadas como operadores que não comutam. Neste trabalho apresentamos o procedimento para quantizar o CE e entender como surgem as flutuações do vácuo quântico. A interação átomo-campo será apresentada na aproximação dipolar, com o que poderemos verificar que a emissão espontânea surge a causa das flutuações do vácuo quântico. Finalmente se apresenta o efeito Casimir, cuja razão pode ser explicada por as flutuações do vácuo quântico.

I. INTRODUÇÃO

Para o final do século XIX, se sabia que o desenvolvimento espaço-temporal do campo de radiação que satisfaz a equação de onda para o potencial vetor se assemelhava ao comportamento dinâmico de uma coleção de osciladores harmônicos. Rayleigh e Jeans escreveram uma expressão para a distribuição de energia do campo de radiação como uma função da frequência, ω , em uma situação ideal onde o campo de radiação é cercado por paredes perfeitamente absorventes, atribuindo uma energia média $k_B T$ para alcançar o equilíbrio. A expressão que eles deduziram estava em concordância experimental para baixas frequências e em desacordo para altos valores de ω . Isto se conheceu como a *catástrofe ultravioleta* [1].

Em 1901 Planck resolveu esta dificuldade propondo que a energia de cada oscilador de radiação tem um múltiplo inteiro de $\hbar\omega$. Quatro anos mais tarde, Einstein propôs que uma onda eletromagnética de comprimento de onda λ fosse tratado como uma coleção de partículas sem massa, cada uma com energia $\hbar\omega$. Uma vez que a mecânica quântica não-relativista foi totalmente desenvolvida, Dirac propôs que as variáveis canônicas do oscilador de radiação pode ser tratados como operadores que não comutam [2].

Como resultado disso, nos temos o campo eletromagnético (CE) quantizado. Neste trabalho, nos temos como objetivo discretizar a energia do CE dada por

$$H = \frac{1}{2} \int (|B|^2 + |E|^2) \quad (1)$$

partindo da decomposição espectral do potencial vetor \vec{A} [2], [3]. Depois, fazendo uma comparação ao oscilador harmônico poderemos quantizar o CE; isto explicará porque surgem as flutuações do vácuo. Além disso faremos um abordagem da interação átomo e campo quantizado para entender a emissão espontânea. Finalmente, apresentaremos

o efeito Casimir como um efeito mensurável gerado pelas flutuações do vácuo.

II. DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Consideremos que o potencial vetor, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ está confinado numa cavidade cubica de comprimento L e volume $V = L^3$, com vácuo e paredes perfeitamente condutoras, e é escrito na forma $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_x(\vec{r}, t)\hat{x} + A_y(\vec{r}, t)\hat{y} + A_z(\vec{r}, t)\hat{z}$. Os campos elétricos e magnéticos em termos do potencial vetorial e potencial escalar estão dados por

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi. \quad (3)$$

Os campos \vec{E} e \vec{B} são invariantes sob uma transformação de gauge, isto é, se inserimos novos potenciais

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad (4)$$

obtemos os mesmos campos, sendo χ uma função arbitrária, Isto nos permite impor a condição de transversalidade (gauge de Coulomb)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0. \quad (5)$$

Já que não há cargas na cavidade, $\phi = 0$. Então, pelas equações de Maxwell, obtemos a equação da onda para o potencial vetor

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

A solução de (6) está descrita por um conjunto infinito, discreto e completo de modos normais de vibração do campo, que permite descrever o campo por um conjunto enumerável de variáveis. A solução de (6) pode ser escrita na forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t) \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c_{\vec{k}}^*(t) \vec{u}_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \right) \quad (7)$$

sendo k os números quânticos dos modos da cavidade definidos pelas condições de contorno e geometria da cavidade. Assim para cada k se tem

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u}_k(\vec{r}) + \frac{\omega_k^2}{c^2} \vec{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{c}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{c}_k(t) = 0 \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (10)$$

com as condições de contorno periódicas: $\vec{A}(\vec{r} + L\hat{x}, t) = \vec{A}(\vec{r} + L\hat{y}, t) = \vec{A}(\vec{r} + L\hat{z}, t) = \vec{A}(\vec{r}, 0)$. A solução para (8) está dada por

$$\vec{u}_{\vec{k},\alpha} = \hat{\epsilon}^{(\alpha)} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \quad (11)$$

e a solução para (9) está dada por:

$$c_{\vec{k},\alpha}^-(t) = c_{\vec{k},\alpha}^-(0) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \quad (12)$$

onde α é a polarização do CE (pode ter duas polarizações $\alpha = 1, 2$), e $\hat{\epsilon}$ é o vetor de polarização. Desta forma, o potencial vetor fica como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c_{\vec{k},\alpha}^-(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\epsilon}^{(\alpha)} + c_{\vec{k},\alpha}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\epsilon}^{(\alpha)} \quad (13)$$

e portanto, os campos E e B podem ser escritos mediante (2) e (3) como

$$\vec{B} = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \left(\hat{\epsilon}^{(\alpha)} \times \vec{k} \right) \left[c_{\vec{k},\alpha}^-(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - c_{\vec{k},\alpha}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \quad (14)$$

$$\vec{E} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \omega_{\vec{k}} \left[c_{\vec{k},\alpha}^-(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - c_{\vec{k},\alpha}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}^{(\alpha)} \quad (15)$$

Agora, para calcular a energia do CE mediante (1), temos que fazer E e B ao quadrado. Para o termo do campo elétrico ao quadrado temos uma soma em k, k' e α . No caso do termos exponenciais da forma $e^{i(k \pm k') \cdot r}$, eles podem ficar como deltas de Kronecker, enquanto aos outros termos vão sumir. Fazemos o mesmo para o campo magnético ao quadrado e a expressão simplificada da energia do CE fica como

$$H = \sum_{\vec{k},\alpha} 2 \left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c} \right)^2 c_{\vec{k},\alpha}^-(t) c_{\vec{k},\alpha}^*(t) \quad (16)$$

É importante lembrar que este hamiltoniano ainda é só o problema clássico, onde $c_{\vec{k},\alpha}^-$ são os coeficientes de Fourier dependente do tempo que satisfaz a equação (9).

III. QUADRATURA DO CAMPO

A técnica de quantização habitual consiste em substituir num Hamiltoniano as variáveis canônicas generalizadas por operadores que satisfazem certas relações de comutação. Notemos que a expressão (16) para a energia do CE não é um Hamiltoniano, já que não está em termos das variáveis canônicas, é dizer, em termos das coordenadas e momentos generalizados. Portanto, para reescrever a definição do hamiltoniano podemos definir as seguintes grandezas:

$$\begin{aligned} Q_{\vec{k},\alpha}^-(t) &= \frac{1}{c} \left(c_{\vec{k},\alpha}^-(t) + c_{\vec{k},\alpha}^*(t) \right) \\ P_{\vec{k},\alpha}^-(t) &= -\frac{i\omega_{\vec{k}}}{c} \left(c_{\vec{k},\alpha}^-(t) - c_{\vec{k},\alpha}^*(t) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Dessas equações, se resolvemos para os coeficientes de Fourier temos

$$\begin{aligned} c_{\vec{k},\alpha}^-(t) &= \frac{c}{2\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha}^-(t) + iP_{\vec{k},\alpha}^-(t) \right] \\ c_{\vec{k},\alpha}^*(t) &= \frac{c}{2\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha}^-(t) - iP_{\vec{k},\alpha}^-(t) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

e substituindo no (16) o Hamiltoniano do CE fica como

$$H = \sum_{\vec{k},\alpha} \frac{1}{2} \left(P_{\vec{k},\alpha}^2(t) + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k},\alpha}^2(t) \right). \quad (19)$$

Agora, $Q_{\vec{k},\alpha}^-$ e $P_{\vec{k},\alpha}^-$ são as **variáveis canônicas** e portanto o campo de radiação pode ser visto como uma **coleção de osciladores harmônicos independentes**, estando cada um caracterizado por um k e um α .

IV. OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

Dado o resultado da eq. (19), é importante lembrar o problema do oscilador harmônico quântico. O hamiltoniano de um oscilador harmônico de massa $m = 1$ e frequência ω é

$$H_{OH} = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (20)$$

onde os operadores p e q satisfazem a relação de comutação $[p, q] = i\hbar$. Substituindo os operadores

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q + ip) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q - ip) \end{aligned} \quad (21)$$

que satisfaz a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$. Calculando, os autoestados do hamiltoniano H_{OH} e seus correspondentes autovalores ficam como [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{OH} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \longrightarrow \\ \begin{array}{l} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{array} \end{array} \right.$$

Os operadores a e a^\dagger são conhecidos como operadores de *aniquilação* e *criação*, respectivamente, porque criam e destroem um quanto de energia $\hbar\omega$ do estado $|n\rangle$.

V. PRIMEIRA QUANTIZAÇÃO

A primeira quantização consiste em atribuir um operador a uma quantidade física (expressa em termos das variáveis canônicas do sistema clássico) um operador. Isto é obtido pela substituição direta das variáveis canônicas por operadores hermiticos, tal que satisfazem as relações de não comutação.

Neste caso postulamos que $Q_{\vec{k},\alpha}^-$ e $P_{\vec{k},\alpha}^-$ são **operadores** que satisfazem

$$\begin{aligned} [Q_{\vec{k},\alpha}^-, P_{\vec{k}',\alpha'}^-] &= i\hbar \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'} \\ [Q_{\vec{k},\alpha}^-, Q_{\vec{k}',\alpha'}^-] &= 0 \\ [P_{\vec{k},\alpha}^-, P_{\vec{k}',\alpha'}^-] &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Em analogia ao problema do oscilador harmônico quântico, definimos os operadores

$$\begin{aligned} a_{\vec{k},\alpha}^-(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha}^-(t) + iP_{\vec{k},\alpha}^-(t) \right] \\ a_{\vec{k},\alpha}^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha}^-(t) - iP_{\vec{k},\alpha}^-(t) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

A conexão entre operadores e coeficientes de Fourier é feita comparando (18) e (23) e fazendo a troca

$$c_{\vec{k},\alpha} \longrightarrow c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k},\alpha}. \quad (24)$$

Portanto, substituindo os coeficientes de Fourier pelos operadores a e a^\dagger no potencial vetor (13) e refazendo a conta da energia do campo electromagnético (lembrando que agora a posição dos operadores tem que ser levada em conta) nós temos que

$$H = \sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k},\alpha}^\dagger(t) a_{\vec{k},\alpha}(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

A equação (25) é o hamiltoniano quantizado do CE cuja soma em k é sobre todos os modos de vibração do CE levando em conta as polarizações α . Com a troca de coeficiente por operador (eq. (24)) no campo elétrico e magnético, outras grandezas como o momento linear e o momento angular podem ser quantizadas.

VI. FLUTUAÇÕES DO VÁCUO QUÂNTICO

Consideremos por simplicidade que nosso campo elétrico só tem um único modo \vec{k} e uma polarização definida. Se temos um estado com um número de fótons bem definidos, o valor médio do campo elétrico é zero, dado que nosso campo elétrico (ou campo magnético) depende linearmente nos operadores de criação e aniquilação. Então a incerteza só depende do valor médio do campo elétrico ao quadrado que vai ter termos cruzados dos operadores de criação e aniquilação. Portanto, a incerteza do campo elétrico é

$$\Delta E = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{V\epsilon_0}} \sqrt{\left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)}. \quad (26)$$

Um estado com um número bem definido de fótons não tem um valor definido do campo electromagnético. Assim mesmo valores bem definidos dos campos elétrico e magnético não tem um número bem definido de fótons, a causa da não comutação dos operadores número de ocupação e dos campos electromagnéticos. Notemos que ainda no estado onde $n_{\vec{k}} = 0$, que é estado do vácuo, as flutuação do campo elétrico é

$$\Delta E = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2V\epsilon_0}}. \quad (27)$$

Estas são as flutuações do vácuo e estão associadas com a energia do ponto zero ou energia do vácuo dada por $\frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_{\vec{k}}$. O universo contem um número infinito de modos de radiação e portanto a soma $\frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_{\vec{k}}$ tende ao infinito. Isso representa um problema importante dentro da teoria quântica dos campos [4]. Aquele infinito pode ser redefinido excluindo modos de alta frequência. A flutuação do vácuo da origem a efeitos observáveis, como a emissão espontânea e o efeito Casimir.

VII. INTERAÇÃO DO ÁTOMO COM O CAMPO QUANTIZADO

O problema da interação da absorção e emissão da radiação num campo quantizado é feito na teoria de perturbações dependente do tempo. Neste abordagem a probabilidade de transição por unidade de tempo gerada por o hamiltoniano de perturbação de um estado inicial a um estado final é proporcional aos elementos da matriz da perturbação. Tanto no tratamento clássico como quântico, a aproximação dipolar do CE é válida para nosso hamiltoniano da perturbação. Então nosso hamiltoniano pode ser escrito da seguinte maneira:

$$H = H_{atomo} + H_{campo} + H_{dipolar} \quad (28)$$

onde H_{campo} está dado por (25), H_{atomo} o hamiltoniano de um elétron ligado a um átomo em ausência de campos externos dado por $\frac{1}{2m}p^2 + V(r)$, e $H_{dipolar}$ dado pela interação do campo com o momento dipolar, é dizer $-\vec{d} \cdot \vec{E}$. La diferencia fundamental entre o tratamento quântico e clássico é que no caso quântico nós trabalhamos com o sistema perturbado. Então, consideremos um feixe de luz monocromática (por exemplo, luz de um laser) que tem um único modo do campo elétrico com frequência ω e polarização ϵ

$$\vec{E} = -i\vec{\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V\epsilon}} (a - a^\dagger) = -\vec{E}_0 (a - a^\dagger) \quad (29)$$

$$\longrightarrow H_{dipolar} = \vec{d} \cdot \vec{E}_0 (a - a^\dagger). \quad (30)$$

Vamos supor que nosso átomo está no estado $|r\rangle$ e que o campo tem n fótons inicialmente. Portanto o estado inicial do sistema pode ser representado da forma $|i\rangle = |r\rangle|n\rangle$. A interação dipolar pode gerar uma transição a um estado final $|f_1\rangle = |s\rangle|n-1\rangle$, onde $|s\rangle$ é outro estado atômico, por meio de a absorção de um fóton; ou uma transição para o estado $|f_2\rangle = |s\rangle|n+1\rangle$ por meio de a emissão de um fóton. As energias dos estado do sistema vão estar dadas pela soma da energia do atomo mais do campo quantizado, da seguinte maneira:

$$\text{para } \begin{cases} |i\rangle = |r\rangle|n\rangle & E_i = E_r + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ |f_1\rangle = |s\rangle|n-1\rangle & E_{f_1} = E_s + \hbar\omega \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \\ |f_2\rangle = |s\rangle|n+1\rangle & E_{f_2} = E_s + \hbar\omega \left((n+1) + \frac{1}{2} \right) \end{cases}.$$

Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, os elementos da matriz da interação dipolar ficam para absorção como

$$\begin{aligned} \langle f_1 | H_{dipolar} | i \rangle &= \langle s, n-1 | H_{dipolar} | r, n \rangle \\ &= \langle s, n-1 | \vec{d} \cdot \vec{E}_0 (a - a^\dagger) | r, n \rangle \\ &= \langle s | \vec{d} | r \rangle \cdot \vec{E}_0 \sqrt{n} \end{aligned} \quad (31)$$

e para a emissão

$$\begin{aligned} \langle f_2 | H_{dipolar} | i \rangle &= \langle s, n+1 | H_{dipolar} | r, n \rangle \\ &= \langle s, n+1 | \vec{d} \cdot \vec{E}_0 (a - a^\dagger) | r, n \rangle \\ &= \langle s | \vec{d} | r \rangle \cdot \vec{E}_0 \sqrt{n+1} \end{aligned} \quad (32)$$

sendo $\langle s|\vec{d}|r\rangle$ a matriz do dipolo elétrico entre os estados $|r\rangle$ e $|s\rangle$. No vácuo quântico, é dizer, para $n = 0$, a probabilidade de absorção é zero, o que é equivalente na aproximação semiclássica: sem campo não há radiação. Não obstante, no caso da emissão podemos ter uma transição mesmo que n seja zero. Este fenômeno não pode ser explicado pela teoria semiclássica, e é conhecido como **emissão espontânea**. Portanto a emissão espontânea está associada aos flutuações do vácuo, o que gera a maior parte da luz visível. No caso que $n = 1$ (injetando um fóton em nosso campo), nós temos mais um fóton na saída, neste caso vão ter 2 fótons de saída. Em geral, para $n > 0$, a emissão de um fóton adicional se chama **emissão estimulada**, e é o processo essencial para o funcionamento do LASER [4].

Os processos de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada são esboçados na Figura 1 para um sistema de dois níveis, sendo $|E_2\rangle$ o estado excitado e o $|E_1\rangle$ o estado base. Um desenvolvimento mais detalhado pode-se encontrar em [4].

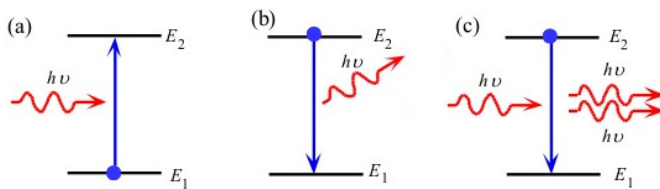


Figura 1. As figuras representam o processo de absorção (a), de emissão espontânea (b) e a emissão estimulada (c) para um fóton que incide com energia $h\nu$ num sistema de dois níveis, sendo $|E_2\rangle$ o estado excitado e o $|E_1\rangle$ o estado base.

VIII. EFEITO CASIMIR

Dadas duas placas de metal descarregadas e separadas por uma distância muito pequena, existe uma força que tende a aproximá-las (ver Figura 2) [5], [3]. Essa força somente é mensurável quando a distância entre as duas placas é extremamente pequena, da ordem do tamanho atômico. Aquele efeito foi previsto por Hendrik Casimir, ao que deve seu nome.

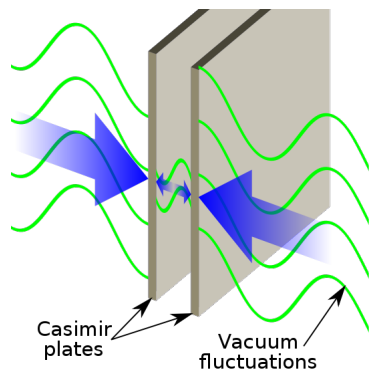


Figura 2. Esquema gráfico do efeito Casimir que permite interpretar a força entre as placas como resultado das diferenças de densidades de energia devido às restrições dos comprimentos de onda.

Uma das interpretações deste efeito é levada em conta por causa vácuo quântico, onde pares de partículas virtuais - antipartículas virtuais formam-se do vácuo continuamente e tornam ao vácuo um instante depois [5]. Como o espaço entre as placas restringe o alcance dos comprimentos de onda possíveis para estas partículas virtuais, as poucas delas estão presentes dentro desse espaço. Como resultado, há uma menor densidade de energia entre as duas placas do que no espaço aberto, o que as empurra uma contra a outra.

O cálculo da força por unidade de área pode ser feito a partir da energia do ponto zero do vácuo fazendo uma regularização, dando como resultado [3].

$$f = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} \quad (33)$$

onde a é a separação entre as placas e o signo menos indica atração. Numericamente a força é muito pequena, $f = -1.30 \times 10^{-27} a^{-4} [Nm^2]$, porém o experimento tem que ser feito a escalas micrométricas.

IX. CONCLUSÕES

Nos conseguimos quantizar o CE por meio da primeira quantização, análogo ao problema do oscilador harmônico quântico. Isso nos permitiram entender que o vácuo quântico tem flutuações gerando por exemplo a emissão espontânea num sistema átomo-campo. Além disso, essas flutuações associadas à energia do ponto zero pode ser mensurável por meio do efeito Casimir a escalas atômicas.

REFERÊNCIAS

- [1] M. L. Kutner, *Astronomy: A Physical Perspective*. Cambridge University Pres, 2003.
- [2] J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*. A-W series in advanced physics, Pearson Education, Incorporated, 1967.
- [3] K. A. Milton, "The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero Point Energy," *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, Jan. 1999.
- [4] G. S. F. Mandl, *Quantum field theory*. 1984.
- [5] Physicsworld, "The casimir effect: a force from nothing." <https://physicsworld.com/a/the-casimir-effect-a-force-from-nothing/>, 2002.